$f(z) = u + iv$

f is analytic fn if:

$$u_x = v_r$$

$$u_y = -v_x$$

In polar:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta$$

$$v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$$

f is harmonic fn if:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

Ex: Show thate if $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ is analytic then
$u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic.

Ex: Show that if $f(z) = u(r,\theta) + i\,v(r,\theta)$ is analytic then
$u(r,\theta)$ and $v(r,\theta)$ are harmonic.

analytic fn:

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta \quad , \quad v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$$

Harmonic fn:

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \ ??$$

$* \, u_r = \frac{1}{r} v_\theta \ \& \ v_r = \frac{-1}{r} u_\theta$ ⟸ الدالة analytic

$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} \overset{??}{=} 0$ ⟸ عشان تكون الدالة harmonic

نفاضل بالنسبة لـ r

$\Rightarrow r u_r = v_\theta$ نعوض عن $v_{\theta r}$

$r u_{rr} + u_r = v_{\theta r}$ — ①

$\Rightarrow r v_r = -u_\theta$

$r v_{\theta r} = -u_{\theta\theta}$

~~$v_{r\theta} = v_{\theta r}$~~

$v_{r\theta} = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta}$ — ②

$v_{r\theta} = v_{\theta r}$ with ①, ②

$r u_{rr} + u_r = \frac{-1}{r} u_{\theta\theta}$

$\therefore r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$ ⋕

② كيفية حساب جزء من $f(z)$ بدلالة الآخر

يعني هذه الفكرة أن يعطي u والمطلوب حساب قيمة v أو العكس

$f(z) = u + iv$, $u_x = v_y$; $u_y = -v_x$

u معلوم , v مجهول

$v_y = u_x$ دالة في x, y

$v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + C_1(x)$ نكامل بالنسبة لـ y جزئيا ونجعل ثابت التكامل $C_1(x)$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$ نستخدم الشرط الثاني لمعرفة الثابت

بنفس طريقة التفكير

Ex1: Show that $u = x^2 - y^2 - y$ harmonic and find conjugate harmonic

$u_{xx} + u_{yy} = 0$?? , $v = ??$

Sol

$u_x = 2x$ $\qquad$ $u_{xx} = 2$

$u_y = -2y - 1$ $\qquad$ $u_{yy} = -2$

$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Rightarrow \therefore u$ is harmonic

$u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$v_y = 2x$

$v = \int 2x \, dy + C_1(x) = 2xy + C_1(x) \longrightarrow$ ①

$u_y = -v_x$

$-2y - 1 = -(2y + C_1'(x))$ هالخطوة نعرف منها هل الخطوات صحيحة أو هناك خطأ

$C_1(x) \neq 1$

$C_1(x) = x + C$

$v = 2xy + x + C$

لو رقم 1 يتعوض عشان الثابت دالة في x

بالتعويض في 1

Ex 2: If $u = e^{2x} \cos ay$ is a real part of anlytic fn
Find the value of a and its conjugate harmonic

لإيجاد خاصية نحسب منها قيمة a

من الدالة التوافقية

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$u_x = 2e^{2x} \cos ay$ $\qquad u_y = e^{2x}(-a \sin ay)$

$u_{xx} = 4e^{2x} \cos ay$ $\qquad u_{yy} = -a^2 e^{2x} \cos ay$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

مستحيل تبقى حاجة

$(4 - a^2) e^{2x} \cos ay = 0$ $\qquad \cos ay = 0 \Rightarrow ay = \frac{(2n \pm 1)\pi}{2}$ $\quad$ only $e^{-\infty} =$

$4 - a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$

$u = e^{2x} \cos 2y \Longrightarrow \boxed{1}$

$u_x = v_y \quad , \quad v_x = -u_y$

$v_y = 2e^{2x} \cos 2y$

$v = \frac{2e^{2x} \sin 2y}{2} + C_1(x)$

$v_x = -u_y$

$v_x = 2e^{2x} \cancel{\sin 2y} + C_1'(x) = \cancel{-}(\cancel{-}e^{2x} 2 \cancel{\sin} 2y)$

$C_1'(x) = 0 \Longrightarrow C_1(x) = C$

$\therefore v = e^{2x} \sin 2y + C$

Ex 3: ① Suppose $f(z)$ and $\overline{f(z)}$ are analytic then $f(z) = \text{Constant}$

② Show that if $f(z)$ is analytic $f(z) = u + iv$ and $|f(z)| = C_1$ then $f(z) = \text{Constant}$

③ Show that if $f(z) = u + iv$ is analytic then $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4 \left|\frac{df}{dz}\right|^2$

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\qquad \boxed{C_1 + iC_2}$

$f(z) = u + iv$

$|f(z)| = C_1 \Rightarrow \sqrt{u^2+v^2} = C_1 \Rightarrow u^2+v^2 = C_1^2$ ①

المطلوب أن نوضح أن $u = C_1$, $v = C_2$ ثابت

$u_x = v_y \quad , u_y = -v_x$

$u^2+v^2 = C_1^2$ ①

نفاضل ① بالنسبة لـ x

$2uu_x + 2vv_x = 0$

$uu_x + vv_x = 0$ ②

نفاضل ① بالنسبة لـ y

$2uu_y + 2vv_y = 0$

$uu_y + vv_y = 0$ ③

$uu_y + vu_x = 0$ ④

من ③ ...

من ②، ④ نضرب ② × u و ④ × v ونجمع

$u^2u_x + u\cancel{v}v_x + v\cancel{u}u_y + v^2u_x = 0$

$u_y = -v_x$

$(u^2+v^2)u_x = 0$

$u^2+v^2 = C_1^2 \quad \therefore u_x = 0 \Rightarrow u = C_1(y)$

$v_y = 0 \quad \Rightarrow v = C_2(x)$

similarty

نضرب ④ × v و ② × u والطرح

$(u^2 - v^2)v_x = 0$

$u = \pm v \Rightarrow u = \text{constant} \quad , v = \text{constant}$

OR $v_x = 0 \quad \Rightarrow v = C_3(y)$

$\therefore C_3(y) = C_2(x) \quad \therefore = \text{Constant}$

$v = \text{Constant}$

$v_x = u_y = 0 \quad \Rightarrow u_y = 0$

$u = C_4(x)$

$C_4(x) = C_1(y) = \text{Constant}$

$\therefore f = u + iv = \text{constant}$ where u, v are const.

طريقة الـ

أن نبدأ من الطرف الأيسر ونوجد $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(u^2+v^2)$ ثم نحسب هذا المقدار نستخدم أن u, v هما harmonic فينتج الصورة المطلوبة.

Ch-3 Elementary Complex fn

و بعدها الجزء
من خلال تعميم الدوال الخاصة الدوال القياسية و نحصل صور
لدى علم الجبر الأول والثاني (نحصل على مجموعة جديدة)

1 Polynomial:

$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

the fn is entire on Ⓓ — الأعداد المركبة

2 Exponential fn:

$f(z) = e^z$ is entire — الدالة e^z ... عند ...

الدالة اللوغاريتمية مقدار ... عند ...

3 logarithmic fn:

$\ln(z) = \ln(r e^{i(\theta \pm 2n\pi)})$

$\ln(x+iy) = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

at $n=0$ the value is a principle value

Ex: Evaluate:

① $\ln(1+i)$

② $(1+i)^{1+i}$

③ the root of $e^z + 1 = 0$ in $|z| < 10$

Sol

① $x = 1$, $y = 1$, $r = \sqrt{2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{1} = 45^\circ$

$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)$

② $Z = (1+i)^{1+i} = e^{\ln(1+i)^{1+i}}$

$= e^{(1+i)\ln(1+i)} =$

$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)$

$e^{(1+i)[\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)]} = e^{\ln 2 - (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)} e^{i[\ln\sqrt{2} + (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)]}$

$= e^{\ln 2 - (\frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)} [\cos(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi) + i\sin(\ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} \pm 2n\pi)]$

③ $e^z + 1 = 0 \quad ; \; |z| < 10$

$e^z = -1$

$z = \ln(-1)$

$x = -1, \; y = 0, \; r = 1, \; \theta = \pi$

$Z = \ln(1) + i(\pi \pm 2n\pi)$

$Z_n = i(1 \pm 2n)\pi$

$n = 0 \Rightarrow Z_0 = i\pi \in D \qquad D: \text{Desk}$

$n = 1 \Rightarrow Z_1 = i3\pi \in D$

$\cancel{n = 2} \Rightarrow Z_{-1} = -i\pi \in D$

$n = -2 \Rightarrow Z_{-2} = -i3\pi \in D$

لمعرفة القسم الي يقع داخل الدائرة
بدنا نعوض عن قيم n ونحسب
المقياس لو طلع أقل من ١٠ بيبقى جوا الدايرة
ولو طلع أكبر من ١٠ بيبقى برا الدايرة